

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité Applications.

1 Généralités

1.1 Formes quadratiques et formes bilinéaires (Rombaldi)

- Forme bilinéaire + exemple
- Matrice de la forme bilinéaire + utilisation de cette forme
- Caractérisation des formes bilinéaires
- Lien entre forme bilinéaire symétrique et matric symétrique
- Théorème de changement de base + Discriminant
- Forme quadratique + unicité de la forme bilinéaire associée
- Forme polaire

1.2 Orthogonalité

- Définitions (vecteurs orth, parties orth etc.)
- Premières propriétés
- Définition isotropie + cône isotrope
- Lien entre noyau et cône isotrope
- Forme dégénérée, définie + rang
- Si q non dégénérée et cône non trivial, y a une base de vecteurs isotropes

2 Classifications (Rombaldi)

2.1 Réduction de Gauss

- Théorème
- Traduction matricielle
- Existence de l'algorithme associé + rapide exemple si possible

2.2 Classification des formes quadratiques réelles

- Signature
- Cauchy-Schwarz
- Classification matricielle + signature + exemple
- Loi de Sylvester
- Dév 1 : Critère de Sylvester

2.3 Sur les corps finis (Perrin, Rombaldi)

- Rappels sur les carrés dans un corps finis
- Théorème de classification
- Nombre de classes d'équivalences de formes quadratiques
- Réciprocité quadratique

3 Applications

3.1 Dans un espace euclidien

- Poser le cadre + théorème de diagonalisation
- Définition ellipsoïde
- Dév 2 : Ellipsoïde de John-Lowner

3.2 En géo-diff

- Lemme de Schwarz
- Condition nécessaire sur la hessienne pour avoir point critique
- Lemme de Morse